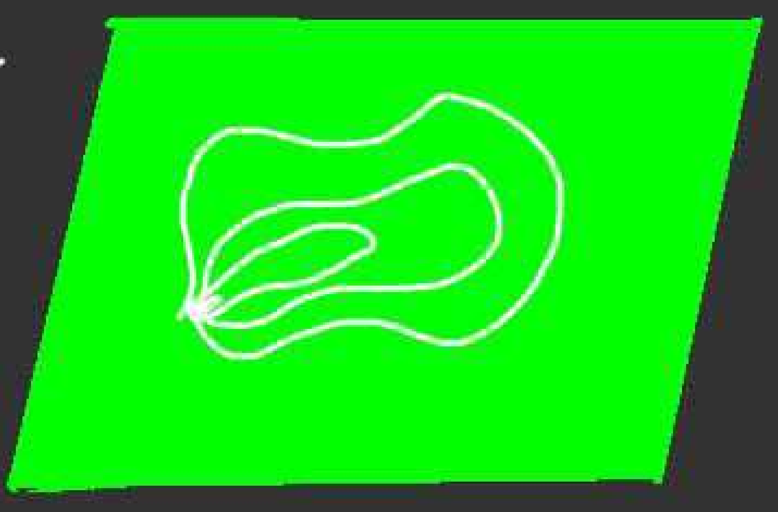
Paulo Liebgott - Departamento de Física - UFSC
paulo.liebgott@ufsc.br

FORÇAS CONSERVATIVAS E TOPOLOGIA

REGIÕES SIMPLESMENTE CONEXAS

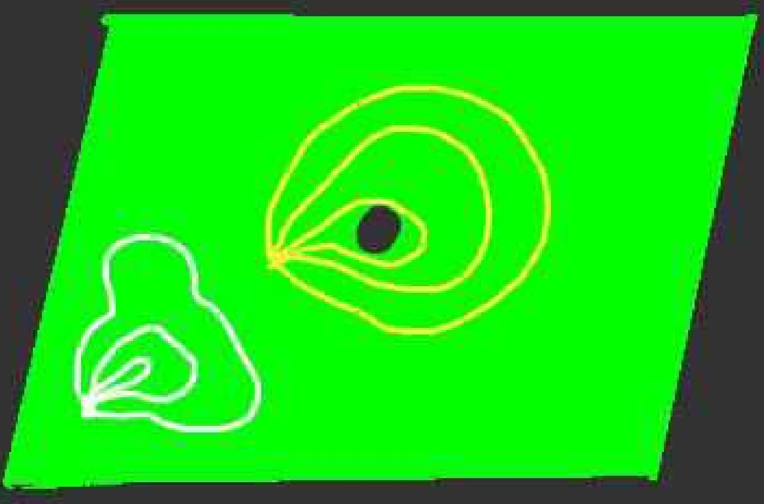
É s.c.

$\mathbb{R}^2$

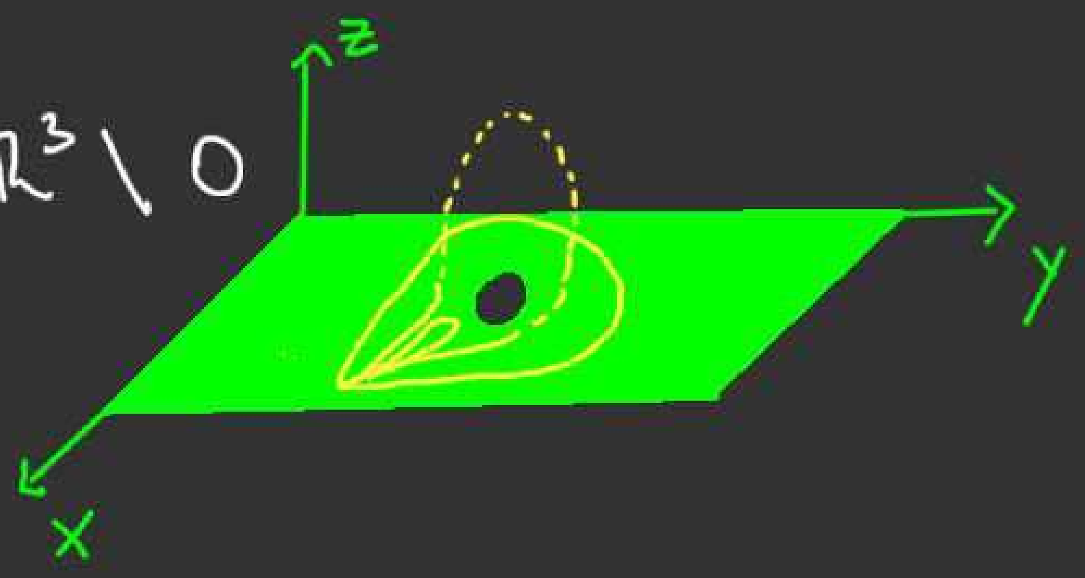


Não é s.c.

$\mathbb{R}^2 \setminus 0$



$\mathbb{R}^3 \setminus 0$



É s.c.

Def.: Uma região é dita simplesmente conexa se qualquer curva fechada pode ser continuamente deformada a um ponto.

Teorema de Stokes: Se a região $\mathcal{R}$ do domínio do campo vetorial $\vec{F}$ é simplesmente conexa, então vale:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{A}\ , \quad S \subset \mathcal{R}.$$

$$\text{Em 2-D:} \quad \oint_C (F_x dx + F_y dy) = \int_S (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\, dA \quad \text{(Green)}.$$

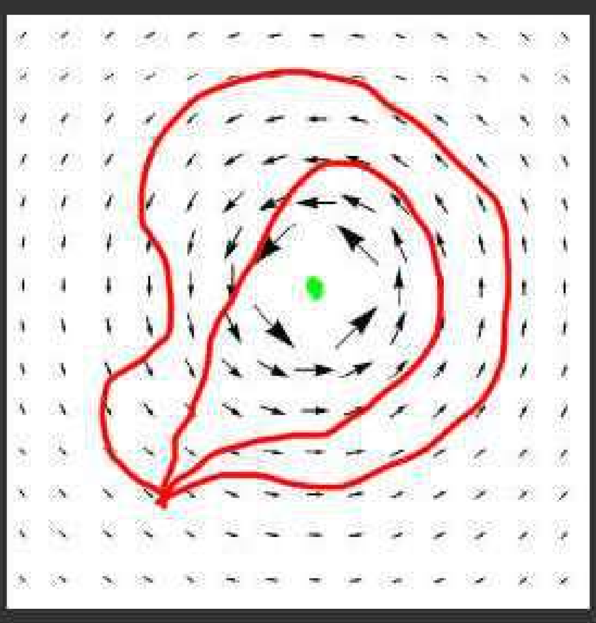
Campos de força irrotacionais, definidos sobre uma região simplesmente conexa, são conservativos.

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \text{ em } \mathcal{R} \text{ s.c.} \Rightarrow \vec{F} \text{ é conservativa.}$$

Prova:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{A} = 0, \ \forall\, C.$$

Exemplo: $\vec{F}(x,y) = \dfrac{-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}}{r^2}$, $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$



Circulação não nula: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \neq 0$.

Irrotacional: $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$

Não é s.c.

Exemplo: $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}}{r^2}$, $\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Circulação não nula em geral, $\exists\, C$ t.q. $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{-y}{r^2} & \frac{x}{r^2} & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Região: $\mathbb{R}^3 \setminus 0 \Rightarrow$ É s.c. $\Rightarrow$ Vale Stokes.

RESUMO DOS RESULTADOS

$\vec{F}$ conservativo (W independe do caminho) $\Leftrightarrow$ $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

$\Downarrow$

$\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = 0$

$\Uparrow$ $\mathcal{R}$ é s.c.