Paulo Liebgott – Departamento de Física – UFSC
paulo.liebgott@ufsc.br

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO – FORÇA DEPENDENTE DA VELOCIDADE

$$\vec{F}(\vec{v}) = \vec{F}(v_x, v_y, v_z).$$

2ª L.N.: $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{v})$;

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = F_x(v_x, v_y, v_z), \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = F_y(v_x, v_y, v_z), \\ m\dfrac{dv_z}{dt} = F_z(v_x, v_y, v_z) \end{cases} \Rightarrow \text{Em geral, acoplado}$$

Simplificação: $\vec{F} = F_x(v_x)\hat{\imath} + F_y(v_y)\hat{\jmath} + F_z(v_z)\hat{k}$.

Para cada direção:

$$m\frac{dv_i}{dt} = F_i(v_i), \qquad i = x, y \text{ ou } z.$$

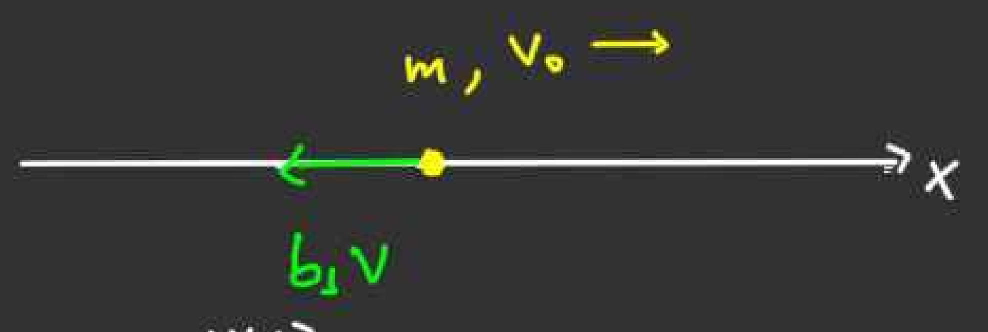
$$\Rightarrow \int_0^t dt = m\int_{v_i(0)}^{v_i(t)} \frac{dv_i}{F_i(v_i)} \Rightarrow \boxed{t = m\int_{v_i(0)}^{v_i(t)} \frac{dv_i}{F_i(v_i)}}$$

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} \Rightarrow \int_{x_i(0)}^{x_i(t)} dx_i = \int_0^t v_i\,dt \Rightarrow \boxed{x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t v_i\,dt}$$

$x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$

Exemplo: Partícula de massa m, na reta, com posição e velocidade iniciais x_0 e v_0, sujeita uma força de arrasto de magnitude $b_1 v$, com b_1 constante. Obtenha posição e velocidade em função do tempo.

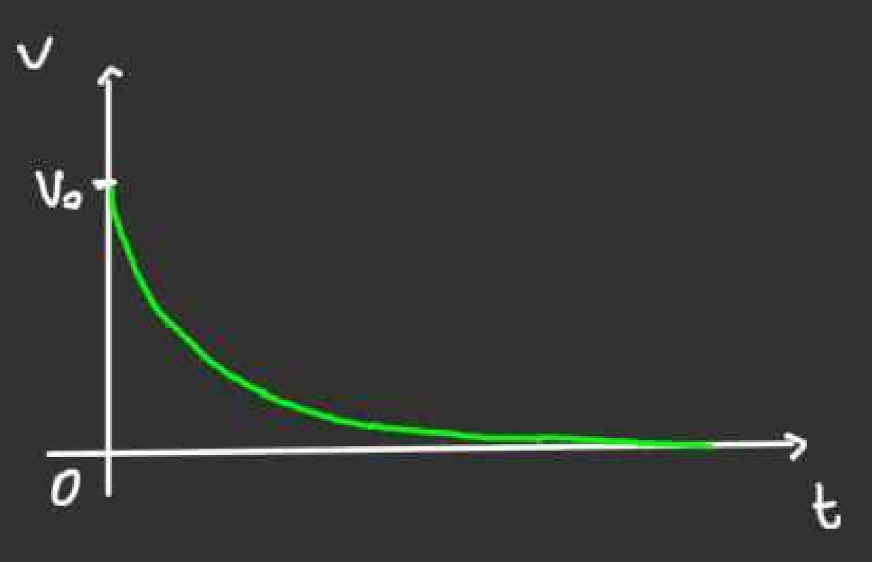
$F = -b_1 v$



$$t = m\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{F(v)} = -\frac{m}{b_1}\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\frac{m}{b_1}\ln\left|\frac{v(t)}{v(0)}\right| = -\frac{m}{b_1}\ln\frac{v(t)}{v(0)}.$$

$$\ln\frac{v(t)}{v(0)} = -\frac{b_1 t}{m} \Rightarrow \frac{v(t)}{v(0)} = \exp\left(-\frac{b_1 t}{m}\right)$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{b_1 t}{m}\right).$$

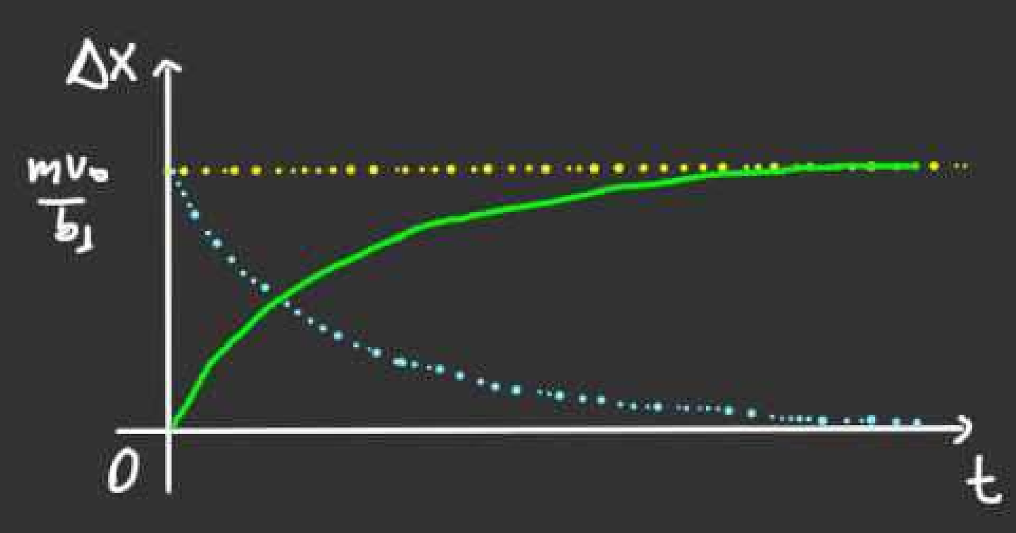


$v \to 0$, $t \to \infty$.

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)\,dt = x_0 + v_0\int_0^t e^{-\frac{b_1 t}{m}}\,dt \qquad du = -\frac{b_1}{m}dt$$

$$= x_0 + v_0\int_0^{-\frac{b_1 t}{m}} e^u\,du\left(-\frac{m}{b_1}\right) = x_0 - \frac{mv_0}{b_1}\left(e^{-\frac{b_1 t}{m}} - 1\right)$$

$$= x_0 + \frac{mv_0}{b_1}\left(1 - e^{-\frac{b_1 t}{m}}\right).$$



$t \to \infty$, $\Delta x \to \dfrac{mv_0}{b_1}$.

Desl. Finito.